



MINISTERUL EDUCAȚIEI

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 11.02.2023**  
**CLASA A IX-A**

**Problema 1.**

Fie predicatul  $p(x): \left| 3\left\{\frac{x}{3}\right\} - 1 \right| = |2x - 5|, x \in [0, +\infty)$ ,  $\{a\}$  este partea fracționară a lui  $a$ .

a) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției  $p(11)$ .

b) Determinați mulțimea de adevăr a predicatului  $p(x)$ .

**Problema 2.**

Fie  $a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 3$ , numere reale strict pozitive astfel încât :

$$\frac{2a_1}{a_2} = \frac{3a_2}{2a_3} = \dots = \frac{na_{n-1}}{(n-1)a_n} = \frac{a_n}{na_1} \text{ și } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

a) Dacă  $n = 3$ , arătați că  $\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2$ .

b) Dacă  $a_1 = \frac{1}{1011}$ , demonstrați că  $S_{2022} = 2023$ .

**Problema 3.**

Fie triunghiul  $ABC$ ,  $AD$  mediană,  $D \in (BC)$ ,  $G$  un punct pe  $(AD)$  și  $P$  mijlocul  $(AG)$ .

Paralela prin  $A$  la  $CG$  intersectează  $BG$  în  $N$  iar paralela prin  $A$  la  $BG$  intersectează  $CG$  în  $M$ .

a) Să se arate că vectorii  $\overrightarrow{MP}$  și  $\overrightarrow{NP}$  sunt coliniari.

b) Dacă  $G$  este centrul de greutate al triunghiului atunci avem relația

$$3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ND}) = 4(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}).$$

**Problema 4.**

Fie numerele reale  $a, b, c > 0$ . Arătați că

a)  $8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a)$ .

b)  $9(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \geq 8abc(a+b+c)(ab+bc+ca)$ .

Florin Rotaru- G.M. 10/2021 (enunț modificat)

**NOTĂ:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.